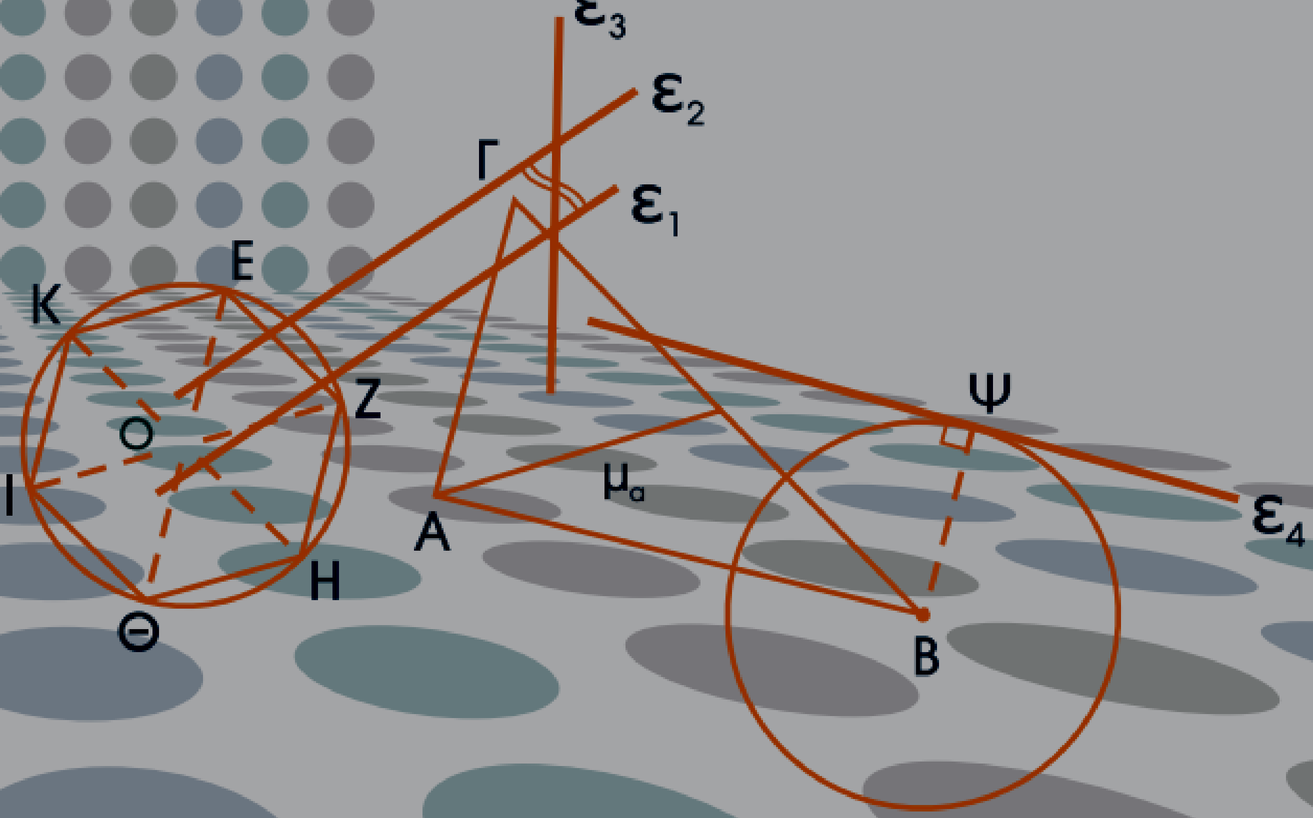
ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Μεθοδική Επανάληψη Γεωμετρίας Β΄ Λυκείου

Στέλιος Μιχαήλογλου



www.askisopolis.gr

8ο Κεφάλαιο: Ομοιότητα

1. Πότε δύο ευθύγραμμα σχήματα λέγονται όμοια; Τι ονομάζεται λόγος ομοιότητας αυτών; Με τι ισούται ο λόγος των περιμέτρων δύο ομοίων ευθυγράμμων σχημάτων;

Απάντηση

Δύο ευθύγραμμα σχήματα λέγονται όμοια, αν έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις γωνίες που σχηματίζονται από ομόλογες πλευρές τους ίσες μία προς μία.
Ο λόγος των ομόλογων πλευρών δύο ευθύγραμμων σχημάτων, λέγεται λόγος ομοιότητας αυτών και συμβολίζεται με λ.
Ο λόγος των περιμέτρων δύο όμοιων ευθύγραμμων σχημάτων ισούται με το λόγο ομοιότητάς τους.

2. Ποια είναι τα κριτήρια ομοιότητας τριγώνων;

Απάντηση

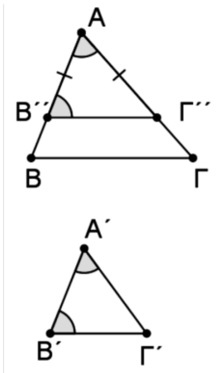
1ο κριτήριο ομοιότητας
Αν δυο τρίγωνα έχουν δυο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι όμοια.

2ο κριτήριο ομοιότητας
Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες, τότε είναι όμοια.

3ο κριτήριο ομοιότητας
Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες μία προς μία, τότε είναι όμοια.

3. Να αποδείξετε ότι αν δυο τρίγωνα έχουν δυο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι όμοια.

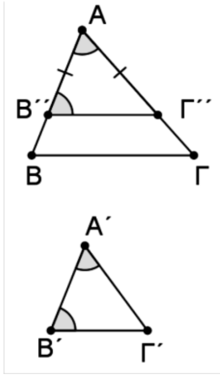
Απόδειξη



Έστω ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν $\hat{A} = \hat{A}'$ και $\hat{B} = \hat{B}'$, οπότε θα έχουν και $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$. Έστω ακόμη ότι $A'B' < AB$, τότε υπάρχει σημείο Β΄΄ στην ΑΒ τέτοιο, ώστε $AB'' = AB'$. Από το Β΄΄ φέρουμε παράλληλη προς τη ΒΓ που τέμνει την ΑΓ στο Γ΄΄. Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒ΄΄Γ΄΄ είναι όμοια (ΒΓ//Β΄΄Γ΄΄), ισχύει ότι $\frac{AB''}{AB} = \frac{A\Gamma''}{A\Gamma} = \frac{B''\Gamma''}{B\Gamma}$ και $\hat{B}'' = \hat{B}, \hat{\Gamma}'' = \hat{\Gamma}$. Όμως τα τρίγωνα ΑΒ΄΄Γ΄΄ και Α΄Β΄Γ΄ είναι ίσα αφού έχουν μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες. Συνεπώς τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' είναι όμοια.

4. Να αποδείξετε ότι αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες, τότε είναι όμοια.

Απόδειξη

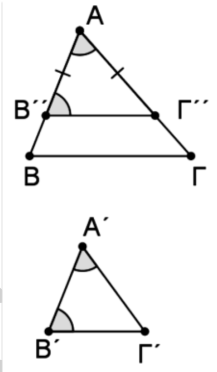


Έστω ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν $\hat{A} = \hat{A}'$ και $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'\Gamma'}{A\Gamma}$.Έστω ακόμη ότι $A'B' < AB$, τότε υπάρχει σημείο Β΄΄ στην ΑΒ τέτοιο, ώστε $AB'' = AB'$. Από το Β΄΄ φέρουμε παράλληλη προς τη ΒΓ που τέμνει την ΑΓ στο Γ΄΄. Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒ΄΄Γ΄΄ είναι όμοια (ΒΓ//Β΄΄Γ΄΄), ισχύει ότι
$\frac{AB''}{AB} = \frac{A\Gamma''}{A\Gamma} = \frac{B''\Gamma''}{B\Gamma} \Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = \frac{A\Gamma''}{A\Gamma}$.
Όμως από την υπόθεση $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'\Gamma'}{A\Gamma}$, άρα $A\Gamma'' = A'\Gamma'$
Τελικά τα τρίγωνα ΑΒ΄΄Γ΄΄ και Α΄Β΄Γ΄ είναι ίσα, καθώς έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες.

5. Να αποδείξετε ότι αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες μία προς μία, τότε είναι όμοια.

Απόδειξη

Έστω ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν $\frac{Α΄Β΄}{ΑΒ} = \frac{Α΄Γ΄}{ΑΓ} = \frac{Β΄Γ΄}{ΒΓ}$.



Έστω ακόμη ότι $Α'Β' < ΑΒ$, τότε υπάρχει σημείο Β΄΄ στην ΑΒ τέτοιο, ώστε $ΑΒ΄΄ = ΑΒ'$. Από το Β΄΄ φέρουμε παράλληλη προς τη ΒΓ που τέμνει την ΑΓ στο Γ΄΄. Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒ΄΄Γ΄΄ είναι όμοια (ΒΓ//Β΄΄Γ΄΄) , ισχύει ότι $\frac{ΑΒ΄΄}{ΑΒ} = \frac{ΑΓ΄΄}{ΑΓ} = \frac{Β΄΄Γ΄΄}{ΒΓ} \Rightarrow \frac{Α΄Β΄}{ΑΒ} = \frac{ΑΓ΄΄}{ΑΓ} = \frac{Β΄΄Γ΄΄}{ΒΓ}$.

Όμως από την υπόθεση είναι $\frac{Α΄Β΄}{ΑΒ} = \frac{Α΄Γ΄}{ΑΓ} = \frac{Β΄Γ΄}{ΒΓ}$, άρα:

$\frac{ΑΓ΄΄}{ΑΓ} = \frac{Α΄Γ΄}{ΑΓ} \Leftrightarrow ΑΓ΄΄ = Α΄Γ΄$ και $\frac{Β΄΄Γ΄΄}{ΒΓ} = \frac{Β΄Γ΄}{ΒΓ} \Leftrightarrow Β΄΄Γ΄΄ = Β΄Γ΄$.

Άρα τα τρίγωνα ΑΒ΄΄Γ΄΄ και Α΄Β΄Γ΄ είναι ίσα γιατί έχουν και τις τρεις πλευρές τους ίσες.

6. Πότε δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι όμοια; Πότε δύο ισόπλευρα τρίγωνα είναι όμοια; Πότε δύο ισοσκελή τρίγωνα είναι όμοια;

Απάντηση

Δυο ορθογώνια τρίγωνα είναι όμοια, όταν έχουν μία οξεία γωνία τους ίση.
Όλα τα ισόπλευρα τρίγωνα είναι όμοια μεταξύ τους.
Δυο ισοσκελή τρίγωνα, τα οποία έχουν μία αντίστοιχη γωνία ίση, είναι όμοια.

7. Ποια είναι η σχέση λόγου ομοιότητας με τους λόγους των υψών, των διχοτόμων και των διαμέσων δύο ομοίων τριγώνων;

Απάντηση

Οι λόγοι των υψών, των διχοτόμων και των διαμέσων δύο ομοίων τριγώνων είναι ίσοι με το λόγο ομοιότητάς τους.

Βασικές ασκήσεις

1. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{Α} = 1\llcorner$). Από τυχαίο σημείο Δ της ΑΓ φέρουμε $ΔΕ \perp ΒΓ$. Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΓ είναι όμοια,

β) $ΑΓ \cdot ΕΔ = ΑΒ \cdot ΕΓ$.

2. Στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ θεωρούμε σημεία Δ και Ε αντίστοιχα, ώστε $ΑΔ = \frac{1}{3}ΑΒ$ και $ΓΕ = \frac{2}{3}ΑΓ$. Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι όμοια,

β) ΒΓ = 3ΔΕ

3. Ένα δέντρο ρίχνει κάποια στιγμή σε οριζόντιο έδαφος σκιά μήκους 24m. Στο ίδιο σημείο, την ίδια στιγμή, μια κατακόρυφη ράβδος μήκους 2m ρίχνει σκιά 3m. Να βρείτε το ύψος του δέντρου.

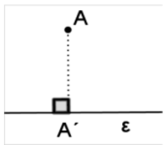
4. Αν ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ είναι τα ύψη και Η το ορθόκεντρο τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι: $ΗΔ \cdot ΗΑ = ΗΒ \cdot ΗΕ = ΗΓ \cdot ΗΖ$.

9ο Κεφάλαιο: Μετρικές σχέσεις

1. Ορθές προβολές

8. Τι ονομάζεται προβολή ενός σημείου Α σε μια ευθεία ε;

Απάντηση

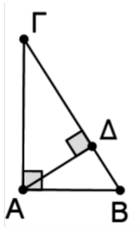


Το ίχνος Α' της καθέτου που φέρουμε από το Α προς την ε το λέμε ορθή προβολή ή απλώς προβολή του Α στην ευθεία ε.

2. Πυθαγόρειο θεώρημα

9. Να αποδείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της πλευράς αυτής στην υποτείνουσα

Απόδειξη



Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και Δ η προβολή της κορυφής Α στην υποτείνουσα ΒΓ. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι $AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta$ και $A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot \Gamma\Delta$.
Για την πρώτη σχέση αρκεί να αποδείξουμε ότι $\frac{AB}{B\Delta} = \frac{B\Gamma}{AB}$, δηλαδή ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΑ είναι όμοια, το οποίο ισχύει αφού $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ και η $\hat{B}$ είναι κοινή.
Όμοια αποδεικνύεται και η σχέση $A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot \Gamma\Delta$.

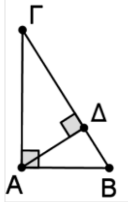
10. Να αποδείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το άθροισμα των τετραγώνων των κάθετων πλευρών του είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας.

Απόδειξη

Από το προηγούμενο θεώρημα ισχύει ότι $AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta$ και $A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot \Gamma\Delta$.
Με πρόσθεση κατά μέλη των ισοτήτων προκύπτει ότι:
$$AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot B\Delta + B\Gamma \cdot \Delta\Gamma = B\Gamma \cdot \left(B\Delta + \Delta\Gamma\right) = B\Gamma \cdot B\Gamma = B\Gamma^2$$

11. Με τι ισούται ο λόγος των κάθετων πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου και γιατί;

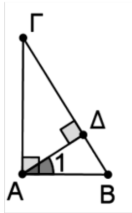
Απάντηση



Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, ο λόγος των τετραγώνων των κάθετων πλευρών του είναι ίσος με το λόγο των προβολών τους πάνω στην υποτείνουσα.
Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και Δ η προβολή της κορυφής Α στην υποτείνουσα ΒΓ. Γνωρίζουμε ότι $AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta$ και $A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot \Gamma\Delta$.
Διαιρώντας τις δύο προηγούμενες σχέσεις κατά μέλη προκύπτει ότι:
$$\frac{AB^2}{A\Gamma^2} = \frac{\cancel{B\Gamma} \cdot B\Delta}{\cancel{B\Gamma} \cdot \Gamma\Delta} = \frac{B\Delta}{\Gamma\Delta}$$

12. Να αποδείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους του που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών του στην υποτείνουσα.

Απόδειξη



Έστω ΑΔ το ύψος του ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ , που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα. Θα αποδείξουμε ότι $ΑΔ^2 = ΒΔ \cdot ΔΓ$.
Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΓΑΔ είναι όμοια, αφού είναι ορθογώνια και $\hat{A}_1 = \hat{Γ}$ ως συμπληρωματικές της Β. Επομένως, οι πλευρές τους είναι ανάλογες, δηλαδή $\frac{ΑΔ}{ΒΔ} = \frac{ΔΓ}{ΑΔ} \Leftrightarrow ΑΔ^2 = ΒΔ \cdot ΔΓ$.

Βασικές ασκήσεις

5. Αν ΑΕ, ΑΖ είναι αντίστοιχα οι προβολές δύο χορδών ΑΓ και ΑΔ ενός κύκλου σε μία διάμετρό του ΑΒ, να αποδείξετε ότι $ΑΖ \cdot ΑΓ^2 = ΑΕ \cdot ΑΔ^2$

6. Αν Δ είναι μέσο της κάθετης πλευράς ΑΓ ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ $\left(\hat{A} = 90^\circ\right)$ και Ε η προβολή του στη ΒΓ, να αποδείξετε ότι $ΕΓ^2 + ΑΒ^2 = ΕΒ^2$. Στη συνέχεια διατάξτε κατά αύξουσα σειρά μήκους τα τμήματα ΔΒ, ΕΒ, ΕΓ.

7. Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ(ΑΒ = ΑΓ) φέρουμε το ύψος ΒΕ. Να αποδείξετε ότι $α^2 + β^2 + γ^2 = 3ΒΕ^2 + 2ΑΕ^2 + ΓΕ^2$.

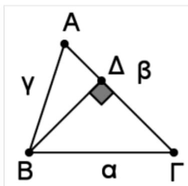
8. Αν οι διαγώνιοι τετραπλεύρου ΑΒΓΔ είναι κάθετες, να αποδείξετε ότι: $ΑΒ^2 + ΓΔ^2 = ΑΔ^2 + ΒΓ^2$

9. Σε τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΓ > ΑΒ και ορθόκεντρο Η να δείξετε ότι: $ΗΓ^2 - ΗΒ^2 = ΑΓ^2 - ΑΒ^2$.

3. Γενίκευση του Πυθαγορείου θεωρήματος

13.Να αποδείξετε ότι το τετράγωνο πλευράς τριγώνου, που βρίσκεται απέναντι από οξεία γωνία, είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δυο άλλων πλευρών του, ελαττωμένο κατά το διπλάσιο γινόμενο της μίας από αυτές επί την προβολή της άλλης πάνω σε αυτή.

Απόδειξη

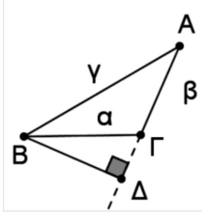


Έστω ότι στο διπλανό τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{A} < 90^\circ$ και ΑΔ η προβολή της πλευράς γ πάνω στη β, θα αποδείξουμε ότι:

$$\boldsymbol{α^2 = β^2 + γ^2 - 2β \cdot ΑΔ}$$

Από τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΒΓ, ΔΒΑ έχουμε, με εφαρμογές του Πυθαγόρειου θεωρήματος αντίστοιχα:

$$α^2 = ΔΒ^2 + ΔΓ^2 \text{ και } ΔΒ^2 = γ^2 - ΑΔ^2$$



Επειδή είναι $\hat{A} < 90^\circ$ τα Δ,Γ βρίσκονται προς το ίδιο μέρος του Α και ειδικότερα:

- αν $\hat{Γ} < 90^\circ$ το Δ βρίσκεται μεταξύ των Α,Γ οπότε $ΔΓ = β - ΑΔ$.
- αν $\hat{Γ} > 90^\circ$ το Γ βρίσκεται μεταξύ των Α,Δ οπότε $ΔΓ = ΑΔ - β$.

Από τις δύο τελευταίες ισότητες προκύπτει ότι

$$ΔΓ^2 = \left(β - ΑΔ\right)^2 = β^2 + ΑΔ^2 - 2β \cdot ΑΔ$$

Με αντικατάσταση αυτής της σχέσης και της $ΔΒ^2 = γ^2 - ΑΔ^2$ στην $α^2 = ΔΒ^2 + ΔΓ^2$ προκύπτει ότι

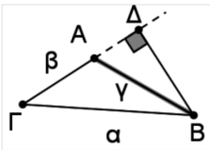
$$α^2 = γ^2 - ΑΔ^2 + β^2 + ΑΔ^2 - 2β \cdot ΑΔ = β^2 + γ^2 - 2β \cdot ΑΔ$$

Αν τέλος $\hat{Γ} = 1∟$, το Δ συμπίπτει με το Γ και το ορθογώνιο τρίγωνο ΓΑΒ δίνει $α^2 = γ^2 - β^2$ που γράφεται $α^2 = β^2 + γ^2 - 2β \cdot ΑΔ$, αφού $ΑΔ = β$.

14.Να αποδείξετε ότι το τετράγωνο πλευράς τριγώνου που βρίσκεται απέναντι από αμβλεία γωνία είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, αυξημένο κατά το διπλάσιο γινόμενο της μίας από αυτές επί την προβολή της άλλης πάνω σε αυτή.

Απόδειξη

Αν δηλαδή σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{A} > 90^\circ$ και ΑΔ η προβολή της πλευράς γ πάνω στη β, τότε ισχύει $\boldsymbol{\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta \cdot A\Delta}$



Από τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΒΓ και ΔΒΑ, παίρνουμε αντίστοιχα:
$\alpha^2 = \Delta B^2 + \Delta\Gamma^2$ και $\Delta B^2 = \gamma^2 - A\Delta^2$.

Επειδή $\hat{A} > 90^\circ$ το Δ βρίσκεται στην προέκταση της ΓΑ προς το Α και επομένως $\Delta\Gamma = \beta + A\Delta$ οπότε $\Delta\Gamma^2 = (\beta + A\Delta)^2 = \beta^2 + A\Delta^2 + 2\beta \cdot A\Delta$.

Με αντικατάσταση των σχέσεων $\Delta B^2 = \gamma^2 - A\Delta^2$ και $\Delta\Gamma^2 = (\beta + A\Delta)^2 = \beta^2 + A\Delta^2 + 2\beta \cdot A\Delta$ στη σχέση $\alpha^2 = \Delta B^2 + \Delta\Gamma^2$, προκύπτει η ζητούμενη ισότητα $\alpha^2 = \gamma^2 - A\Delta^2 + \beta^2 + A\Delta^2 + 2\beta \cdot A\Delta = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta \cdot A\Delta$.

15. Ποια σχέση πρέπει να έχουν οι πλευρές ενός τριγώνου ΑΒΓ ώστε μια γωνία του να είναι αμβλεία, ορθή ή οξεία;

Απάντηση

$\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$, αν και μόνο αν $\hat{A} > 90^o$

$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$, αν και μόνο αν $\hat{A} = 90^o$

$\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$, αν και μόνο αν $\hat{A} < 90^o$

16.Ποιος είναι ο νόμος των συνημιτόνων;

Απάντηση

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση : $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A$

Βασικές ασκήσεις

10.Να εξετάσετε αν υπάρχει τρίγωνο ΑΒΓ, με α=6μ, β=5μ, γ=4μ, όπου μ θετική παράμετρος. Να εξετασθεί το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του

11.Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 4cm, ΑΓ = 5cm και $A\hat{B}\Delta = 30^\circ$, όπου ΒΔ το ύψος του. Να υπολογισθεί η πλευρά του ΒΓ.

12.Να αποδείξετε ότι σε κάθε τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ, ΓΔ ισχύει ότι
$A\Gamma^2 + B\Delta^2 = A\Delta^2 + B\Gamma^2 + 2AB \cdot \Gamma\Delta$

13.Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 1\llcorner$). Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΓ κατά ΓΔ=ΒΓ. Να αποδείξετε ότι $B\Delta^2 = 2B\Gamma \cdot A\Delta$.

14.Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) φέρουμε παράλληλο της ΒΓ, που τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα Δ και Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $BE^2 = E\Gamma^2 + B\Gamma \cdot \Delta E$.

15.Αν σ' ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta$, να αποδείξετε ότι $\Gamma = 60^\circ$ και αντιστρόφως.

16.Οι πλευρές ενός τριγώνου ΑΒΓ είναι: ΑΒ = 3cm, ΒΓ = 5cm, ΑΓ = 7cm.
α) Να προσδιοριστεί το είδος του ως προς τις γωνίες του

β) Να υπολογιστεί σε μοίρες η γωνία του τριγώνου που βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά του.
γ) Να υπολογίσετε την προβολή ΒΔ της πλευράς ΑΒ πάνω στη ΒΓ.

17. Στη βάση ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ = 11 παίρνουμε σημείο Δ, τέτοιο ώστε να είναι ΒΔ = 3 και ΔΓ = 7. Να υπολογίσετε το ΑΔ.

10ο Κεφάλαιο: Εμβαδά

1. Εμβαδόν βασικών ευθύγραμμων σχημάτων

17. Πότε δύο σχήματα λέγονται ισοδύναμα ή ισεμβαδικά;

Απάντηση

Δύο σχήματα που έχουν το ίδιο εμβαδόν λέγονται ισοδύναμα ή ισεμβαδικά.

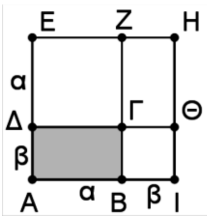
18. Με τι είναι ίσο το εμβαδόν ενός τετραγώνου πλευράς α;

Απάντηση

Το εμβαδόν Ε ενός τετραγώνου πλευράς α είναι α^2, δηλαδή: $E=\alpha^2$.

19. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν ενός ορθογωνίου ισούται με το γινόμενο των πλευρών του. Δηλαδή αν α,β οι πλευρές και Ε το εμβαδόν του, τότε $E=\alpha\cdot\beta$.

Απόδειξη



Έστω ένα ορθογώνιο ΑΒΓΔ, με ΑΒ = α και ΑΔ = β . Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΔ κατά τμήμα $\Delta E=\alpha$, την ΑΒ κατά $BI=\beta$ και σχηματίζουμε το τετράγωνο ΑΙΗΕ, το οποίο είναι φανερό ότι έχει πλευρά $\alpha+\beta$ και επομένως είναι:

$(AIHE)=(\alpha+\beta)^2$ (1)

Προεκτείνοντας τις ΔΓ και ΒΓ σχηματίζονται τα τετράγωνα ΔΓΖΕ, ΒΙΘΓ με πλευρές α, β αντίστοιχα και το ορθογώνιο ΓΘΗΖ που είναι ίσο με το ΑΒΓΔ. Είναι $(\Delta\Gamma Z E)=\alpha^2$, $(BI\Theta\Gamma)=\beta^2$ και $(\Gamma\Theta H Z)=(AB\Gamma\Delta)$ (2).

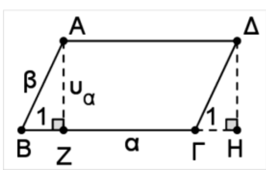
Είναι $(AIHE)=(AB\Gamma\Delta)+(\Gamma\Theta HZ)+(BI\Theta\Gamma)+(\Delta\Gamma ZE)$, οπότε από τις (1),(2) προκύπτει:

$(\alpha+\beta)^2=2(AB\Gamma\Delta)+\alpha^2+\beta^2\Leftrightarrow$

$\cancel{\alpha^2}+2\alpha\beta+\cancel{\beta^2}=2(AB\Gamma\Delta)+\cancel{\alpha^2}+\cancel{\beta^2}\Leftrightarrow(AB\Gamma\Delta)=\alpha\cdot\beta$

20. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν Ε ενός παραλληλογράμμου ισούται με το γινόμενο μιας πλευράς του επί το ύψος που αντιστοιχεί σε αυτή, δηλαδή $E=\alpha\upsilon_\alpha=\beta\upsilon_\beta$, όπου α, β οι πλευρές και υ_α, υ_β τα αντίστοιχα ύψη.

Απόδειξη

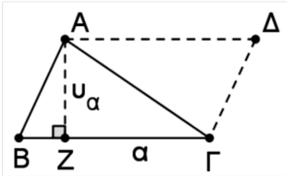


Ας θεωρήσουμε ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και ας φέρουμε το ύψος ΑΖ που αντιστοιχεί στη ΒΓ. Θα αποδείξουμε ότι $(AB\Gamma\Delta)=B\Gamma\cdot AZ$.
Από το Δ φέρουμε ΔΗ κάθετη στην προέκταση της ΒΓ. Τότε τα τρίγωνα ΖΒΑ και ΗΓΔ είναι ίσα ($\hat{Z}=\hat{H}=90°$, ΑΒ = ΔΓ και $\hat{B}_1=\hat{\Gamma}_1$), οπότε:
$(ZBA)=(H\Gamma\Delta)$ (1). Όμως $(AB\Gamma\Delta)=(ABZ)+(AZ\Gamma\Delta)$, οπότε σύμφωνα με την (1) προκύπτει ότι $(AB\Gamma\Delta)=(AZ\Gamma\Delta)+(\Delta\Gamma H)=(AZH\Delta)$.

Επομένως $(ΑΒΓΔ)=(ΑΖΗΔ)=ΑΔ\cdot ΑΖ=ΒΓ\cdot ΑΖ$.

21.Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν Ε ενός τριγώνου είναι ίσο με το ημιγινόμενο μιας πλευράς επί το αντίστοιχο ύψος, δηλαδή $E=\frac{1}{2}\alpha\cdot\upsilon_\alpha=\frac{1}{2}\beta\cdot\upsilon_\beta=\frac{1}{2}\gamma\cdot\upsilon_\gamma$.

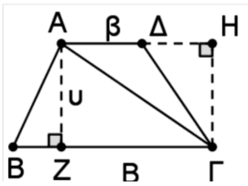
Απόδειξη



Με πλευρές ΑΒ και ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ σχηματίζουμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, το εμβαδόν του οποίου είναι $(ΑΒΓΔ)=\alpha\cdot\upsilon_\alpha$ (1).
Όμως τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΑΓ είναι ίσα, οπότε:
(ΑΒΓ) = (ΑΔΓ) (2).
Από το σχήμα έχουμε ότι $(ΑΒΓΔ)=(ΑΒΓ)+(ΑΓΔ)$ η οποία, σύμφωνα με τις (1) και (2), μετατρέπεται στην $\alpha\cdot\upsilon_\alpha=2(ΑΒΓ)\Leftrightarrow(ΑΒΓ)=\frac{1}{2}\alpha\cdot\upsilon_\alpha$.

22.Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν τραπεζίου ισούται με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεών του επί το ύψος του, δηλαδή $E=\frac{(B+\beta)}{2}\cdot\upsilon$.

Απόδειξη



Έστω τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΒΓ//ΑΔ) , με βάσεις ΒΓ = Β, ΑΔ = β και ύψος υ. Φέρουμε τη διαγώνιο ΑΓ. Τότε έχουμε

$$E=(ΑΒΓΔ)=(ΑΒΓ)+(ΑΓΔ) \qquad (1).$$

Αλλά τα δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΓΔ έχουν το ίδιο ύψος υ και βάσεις Β, β αντίστοιχα και επομένως:

$$(ΑΒΓ)=\frac{1}{2}Β\cdot\ \upsilon \text{ και } (ΑΒΔ)=\frac{1}{2}\beta\cdot\upsilon \quad (2),$$

Με αντικατάσταση των σχέσεων (2) στην (1) προκύπτει ότι $E=\frac{(B+\beta)}{2}\cdot\upsilon$, δηλαδή το ζητούμενο.

23.Ποια σχέση συνδέει το εμβαδόν τραπεζίου με τη διάμεσό του;

Απάντηση

Το εμβαδόν τραπεζίου ισούται με το γινόμενο της διαμέσου επί το ύψος του.

24.Ποιος τύπος δίνει το εμβαδόν ισόπλευρου τριγώνου πλευράς α; Πως υπολογίζετε το εμβαδόν ρόμβου με διαγώνιες δ_1,δ_2 ;

Απάντηση

Το εμβαδόν ισόπλευρου τριγώνου είναι: $E=\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$ και του ρόμβου: $E=\frac{\delta_1\cdot\delta_2}{2}$

Βασικές ασκήσεις

18. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 6, ΑΓ = 8 και $\hat{A}=60^\circ$. Να βρείτε:
α) το ύψος υ_β , ii) το εμβαδόν (ΑΒΓ), iii) το ύψος υ_α.

19.Αν οι διάμεσοι ΑΔ και ΒΕ τριγώνου ΑΒΓ τέμνονται στο Θ να αποδείξετε ότι:
α) (ΑΒΕ) = (ΒΕΓ), **β)** (ΑΘΒ) = (ΔΓΕΘ) και **γ)** (ΒΘΔ) = (ΑΘΕ).

20.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και το βαρύκεντρό του Θ. Από σημείο Σ της διαμέσου ΑΔ φέρουμε τις κάθετες ΣΕ, ΣΖ στις ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι

α) (ΑΒΣ) = (ΑΓΣ), **β)** $AB \cdot \Sigma Z = A\Gamma \cdot \Sigma E$ και **γ)** $(AB\Theta) = (B\Gamma\Theta) = \frac{1}{3}(AB\Gamma)$.

21. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΒΓ//ΑΔ). Αν Μ το μέσο της πλευράς του ΑΒ, να αποδείξετε ότι (ΑΒΓΔ) = 2(ΜΓΔ).

22. Να υπολογιστεί το εμβαδά τριγώνου ΑΒΓ, όταν $B\Gamma = \alpha$, $B = 45°$ και $\Gamma = 30°$.

2. Άλλοι τύποι για το εμβαδόν τριγώνου

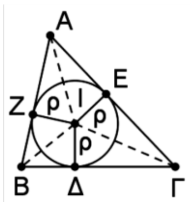
25. Να γράψετε τον τύπο του Ήρωνα.

Απάντηση

$E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$, όπου τα η ημιπερίμετρος του τριγώνου.

26. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν Ε ενός τριγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας ρ είναι $E = \tau\rho$.

Απόδειξη



Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και ο εγγεγραμμένος κύκλος του (Ι, ρ). Τα τρίγωνα ΙΒΓ, ΙΓΑ και ΙΑΒ έχουν το ίδιο ύψος ρ και δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία, οπότε:

$$E = (AB\Gamma) = (IAB) + (IB\Gamma) + (IA\Gamma) \Leftrightarrow$$

$$E = \frac{1}{2}\gamma\rho + \frac{1}{2}\alpha\rho + \frac{1}{2}\beta\rho = \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\rho = \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}\tau\rho = \tau\rho$$

27. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν Ε ενός τριγώνου περιγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R είναι $E = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}$.

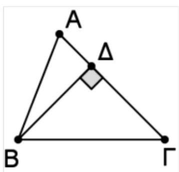
Απόδειξη

Γνωρίζουμε ότι $\beta\gamma = 2R\upsilon_\alpha$, οπότε $\upsilon_\alpha = \frac{\beta\gamma}{2R}$.

Είναι $E = \frac{1}{2}\alpha \cdot \upsilon_\alpha = \frac{1}{2}\alpha \cdot \frac{\beta\gamma}{2R} = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}$

28. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν Ε ενός τριγώνου δίνεται από τον τύπο $E = \frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A = \frac{1}{2}\gamma\alpha\eta\mu B = \frac{1}{2}\alpha\beta\eta\mu\Gamma$

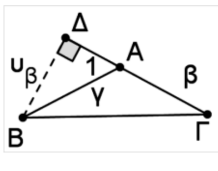
Απόδειξη



Αν $\hat{A} < 90^\circ$ τότε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ ισχύει ότι:

$$\eta\mu A = \frac{\upsilon_\beta}{\gamma} \Leftrightarrow \upsilon_\beta = \gamma\eta\mu A$$

Αν $\hat{A} > 90^\circ$ τότε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ ισχύει ότι:



$$\eta\mu A_1 = \frac{\upsilon_\beta}{\gamma} \Leftrightarrow \upsilon_\beta = \gamma\eta\mu(180^\circ - A) = \gamma\eta\mu A$$

Οπότε και στις δύο περιπτώσεις είναι $\upsilon_\beta = \gamma\eta\mu A$, άρα

$$E = \frac{1}{2}\beta\upsilon_\beta = \frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A.$$

Όταν $\hat{A} = 90^\circ$, τότε $\upsilon_\beta = \gamma$ και πάλι ισχύει ο τύπος.

Όμοια αποδεικνύονται και οι υπόλοιποι τύποι.

29. Ποιος είναι ο νόμος των ημιτόνων;

Απάντηση

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι: $\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} = 2R$, όπου R η ακτίνα του περιγεγραμμένου του κύκλου.

Βασικές ασκήσεις

23. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΔ//ΒΓ) με ΒΓ = 25, ΑΔ = 11, ΑΒ = 13 και ΔΓ = 15. Να βρείτε το εμβαδόν του και το ύψος του.

24. Σε τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} \neq 1\llcorner$ φέρουμε τα ύψη ΒΖ και ΓΗ. Να αποδείξετε ότι (ΑΖΗ) = (ΑΒΓ)συν^{2}Α.

25. Τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου ΑΒΓ είναι $\alpha = 10$, $\beta = 12$ και $\gamma = 14$. Να υπολογίσετε το εμβαδό, τα ύψη και τις ακτίνες του εγγεγραμμένου και περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

26. Οι διαγώνιες ΑΓ και ΒΔ ενός κυρτού τετραπλεύρου ΑΒΓΔ έχουν μήκη ΑΓ = 6, ΒΔ = 10 και μια γωνία τους είναι 30°. Να υπολογισθεί το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

3. Λόγος εμβαδών ομοίων τριγώνων - πολυγώνων

30. Με τι ισούται ο λόγος των εμβαδών δύο τριγώνων που έχουν ίσες βάσεις ή ίσα ύψη;

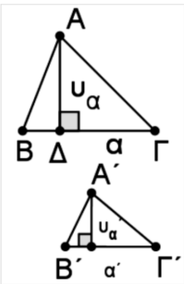
Απάντηση

Αν δύο τρίγωνα έχουν ίσες βάσεις, τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των αντίστοιχων υψών, ενώ αν έχουν ίσα ύψη, τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των αντίστοιχων βάσεων.

31. Να αποδείξετε ότι αν δυο τρίγωνα είναι όμοια τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας.

Απόδειξη

Έστω δύο όμοια τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ με $\hat{A} = \hat{A}'$ και $\hat{B} = \hat{B}'$.



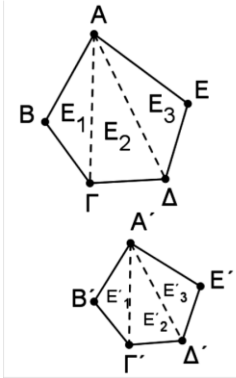
Είναι $\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\upsilon_\alpha}{\upsilon_{\alpha'}} = \lambda$, όπου λ ο λόγος ομοιότητας των τριγώνων.

Είναι $\frac{E}{E'} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}}\alpha\upsilon_\alpha}{\cancel{\frac{1}{2}}\alpha'\upsilon_{\alpha'}} = \frac{\alpha}{\alpha'} \cdot \frac{\upsilon_\alpha}{\upsilon_{\alpha'}} = \lambda^2$

32. Να αποδείξετε ότι ο λόγος των εμβαδών δύο ομοίων πολυγώνων ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας.

Απόδειξη

Έστω τα όμοια πολύγωνα ΑΒΓΔΕ και Α΄Β΄Γ΄Δ΄Ε΄ με λόγο ομοιότητας:
$$\frac{ΑΒ}{Α΄Β΄}=\frac{ΒΓ}{Β΄Γ΄}=\frac{ΓΔ}{Γ΄Δ΄}=\frac{ΔΕ}{Δ΄Ε΄}=\frac{ΕΑ}{Ε΄Α΄}=\lambda .$$
Για τα εμβαδά $Ε_1, Ε_2, Ε_3, Ε_1', Ε_2', Ε_3'$ του διπλανού σχήματος ισχύει ότι:
$$\frac{Ε_1}{Ε_1'}=\left(\frac{ΑΒ}{Α΄Β΄}\right)^2=\lambda^2,\ \frac{Ε_2}{Ε_2'}=\left(\frac{ΓΔ}{Γ΄Γ΄}\right)^2=\lambda^2,\ \frac{Ε_3}{Ε_3'}=\left(\frac{ΔΕ}{Δ΄Ε΄}\right)^2=\lambda^2,$$
οπότε: $\lambda^2=\frac{Ε_1}{Ε_1'}=\frac{Ε_2}{Ε_2'}=\frac{Ε_3}{Ε_3'}=\frac{Ε_1+Ε_2+Ε_3}{Ε_1'+Ε_2'+Ε_3'}=\frac{(ΑΒΓΔΕ)}{(Α΄Β΄Γ΄Δ΄Ε΄)}$

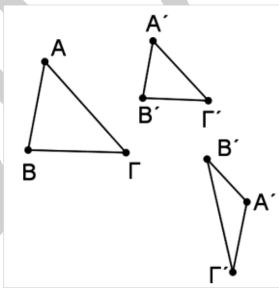


33.Να αποδείξετε ότι αν μία γωνία ενός τριγώνου είναι ίση ή παραπληρωματική με μια γωνία ενός άλλου τριγώνου, τότε ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές.

Απόδειξη

Έστω ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν $\hat{Α}=\hat{Α}'$ ή $\hat{Α}+\hat{Α}'=180^\circ$, τότε και στις δύο περιπτώσεις θα ισχύει ότι

ημΑ = ημΑ΄, οπότε: $\frac{Ε}{Ε'}=\frac{\cancel{\frac{1}{2}}βγ\cancel{ημΑ}}{\cancel{\frac{1}{2}}β΄γ΄\cancel{ημΑ΄}}=\frac{βγ}{β΄γ΄}$.



Βασικές ασκήσεις

27.Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με εμβαδόν $20m^2$. Αν Μ σημείο στην προέκταση της ΑΒ τέτοιο ώστε ΑΒ = 2ΒΜ, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΜΒΓ.

28. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ και Ζ των προεκτάσεων των ΒΑ και ΓΑ αντίστοιχα, προς το Α, ώστε $ΑΔ=\frac{2}{3}ΑΒ$ και $ΑΖ=\frac{1}{2}ΑΓ$.Αν το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι $30m^2$, να βρείτε το εμβαδόν του ΑΔΖ.

29. Προεκτείνουμε τις πλευρές ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ και παίρνουμε αντίστοιχα τα ευθύγραμμα τμήματα ΓΔ = ΒΓ, ΑΕ = ΓΑ και ΒΖ = ΑΒ. Να βρείτε το λόγο των εμβαδών των τριγώνων ΔΕΖ και ΑΒΓ.

30.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{Β},\hat{Γ}<90^\circ$ και το ύψος του ΑΔ. Στο ημιεπίπεδο (ΒΓ, Α) φέρουμε $Βx\perp ΒΓ$ και $Γy\perp ΒΓ$. Πάνω στις Βx, Γy παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Ε και Ζ, ώστε να είναι $ΒΕ=ΓΖ=2ΑΔ$. Αν Μ, Ν είναι τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $(ΕΒΜ)+(ΖΓΝ)=(ΑΒΓ)$.

31.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Ευθεία παράλληλη προς τη ΒΓ, τέμνει την ΑΒ στο Δ και την ΑΓ στο Ε. Να αποδείξετε ότι $(ΑΒΔ)^2=(ΑΔΕ)(ΑΒΓ)$.

Γενικές ασκήσεις στα εμβαδά

32. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και ευθεία ε//ΒΓ, που τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα Δ και Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
i) (ΒΔΕ) = (ΓΔΕ), **ii)** (ΒΑΕ) = (ΓΑΔ),
iii) (ΒΑΕ) + (ΓΑΔ) = (ΑΒΓ), με την επιπλέον υπόθεση ότι τα Δ, Ε είναι μέσα των ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα.

33. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ = 6cm και $\hat{A} = 120°$.
α) Να βρεθεί το εμβαδόν του,
β) Αν Ε είναι σημείο της ΑΓ τέτοιο, ώστε $AE = \frac{1}{3}A\Gamma$ και ΑΔ το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ, να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΔΕΓ.
γ) Αν η παράλληλη από το Α προς τη ΒΓ τέμνει την προέκταση της ΔΕ στο Ζ, να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΑΕΖ.

11ο Κεφάλαιο: Μέτρηση κύκλου

Κανονικά πολύγωνα

1.Ιδιότητες και στοιχεία κανονικών πολυγώνων

34.Πότε ένα πολύγωνο λέγεται κανονικό; Με τι ισούται η γωνία κανονικού ν- γώνου;

Απάντηση

Ένα πολύγωνο λέγεται κανονικό, όταν έχει όλες τις πλευρές του ίσες και όλες τις γωνίες του ίσες.
Έστω $A_1A_2...A_\nu$ ένα κανονικό πολύγωνο με ν πλευρές και έστω
$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \ ... \ = \hat{A}_\nu = \varphi_\nu$. Τότε $\varphi_\nu = 180° - \frac{360°}{\nu}$.

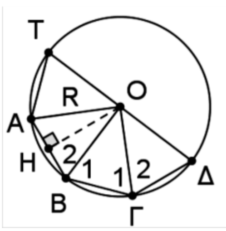
35.Πότε δύο κανονικά πολύγωνα είναι όμοια;

Απάντηση

Αν δύο κανονικά πολύγωνα έχουν τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια.

36.Να αποδείξετε ότι κάθε κανονικό πολύγωνο εγγράφεται σε έναν κύκλο και περιγράφεται σε έναν άλλον. Οι δύο αυτοί κύκλοι είναι ομόκεντροι.

Απόδειξη



Έστω ΑΒΓΔ ...Τ ένα κανονικό πολύγωνο . Θεωρούμε τον κύκλο (Ο, R) που διέρχεται από τις κορυφές Α, Β, Γ του πολυγώνου. Θα αποδείξουμε ότι ο κύκλος αυτός διέρχεται και από την κορυφή Δ, δηλαδή ότι ΟΔ = R.
Επειδή ΟΒ = ΟΓ = R, το τρίγωνο ΟΒΓ είναι ισοσκελές και επομένως $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1 = \varphi$, οπότε τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΓΔ είναι ίσα, γιατί έχουν:
ΟΒ = ΟΓ, ΑΒ = ΓΔ (αφού ΑΒΓΔ... Τ κανονικό) και $\hat{B}_2 = \hat{B} - \varphi = \hat{\Gamma} - \varphi = \hat{\Gamma}_2$.
Από την ισότητα αυτή προκύπτει ότι ΟΔ = ΟΑ = R. Όμοια αποδεικνύεται ότι ο κύκλος (Ο,R) διέρχεται και από τις υπόλοιπες κορυφές Ε, Ζ, ... Τ και επομένως το πολύγωνο είναι εγγράψιμο. Οι πλευρές του πολυγώνου είναι ίσες χορδές του κύκλου (Ο,R), επομένως και τα αποστήματά τους θα είναι ίσα, έστω με α. Επομένως, ο κύκλος (O,α) εφάπτεται στις πλευρές του ΑΒΓΔ...Τ, άρα το πολύγωνο είναι περιγράψιμο σε κύκλο. Είναι φανερό, από τα παραπάνω, ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος (Ο,R) και ο εγγεγραμμένος (O,α) του πολυγώνου είναι ομόκεντροι.

37.Τι ονομάζεται κέντρο, τι ακτίνα, τι απόστημα και τι κεντρική γωνία του κανονικού πολυγώνου;

Απόδειξη

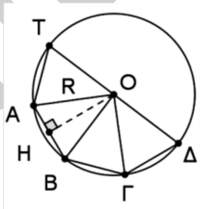
Το κοινό κέντρο των δύο αυτών κύκλων λέγεται κέντρο του πολυγώνου.
Η ακτίνα R του περιγεγραμμένου κύκλου λέγεται ακτίνα του πολυγώνου, ενώ η απόσταση του κέντρου από μια πλευρά του, δηλαδή η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου λέγεται απόστημα του πολυγώνου.
Επειδή τα τόξα ΑΒ, ΒΓ, ... , ΤΑ είναι ίσα, οι επίκεντρες γωνίες ΑÔΒ, ΒÔΓ, ..., ΤÔΑ είναι ίσες. Καθεμία από τις γωνίες αυτές, δηλαδή η γωνία υπό την οποία φαίνεται κάθε πλευρά του πολυγώνου από το κέντρο του, λέγεται κεντρική γωνία του πολυγώνου.

38.Να αποδείξετε ότι σε κάθε κανονικό ν-γωνο ακτίνας Rισχύουν οι σχέσεις:

i. $\alpha_\nu^2 + \frac{\lambda_\nu^2}{4} = R^2$ **ii.** $P_\nu = \nu\lambda_\nu$

iii. $\omega_\nu = \frac{360^\circ}{\nu}$ **iv.** $E_\nu = \frac{1}{2}P_\nu\alpha_\nu$

Απόδειξη



i. Έστω ΑΒΓΔ...Τ ένα κανονικό ν- γωνο, R η ακτίνα του, ΑΒ = λ_ν η πλευρά του και ΟΗ = αν το απόστημά του. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΗΟΑ, με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος προκύπτει $OH^2 + HA^2 = OA^2$, δηλαδή $\alpha_\nu^2 + \left(\frac{\lambda_\nu}{2}\right)^2 = R^2$.

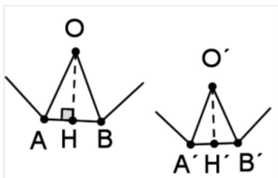
ii. Επειδή ΑΒ = ΒΓ = ... = ΤΑ = λ_ν, θα είναι $P_\nu = \nu \cdot \lambda_\nu$.

iii. Επειδή $AB = B\Gamma = ... = TA$ θα είναι ΑÔΒ = ΒÔΓ = ... = ΤÔΑ = ω_ν και αφού οι γωνίες ΑÔΒ, ΒÔΓ, ... και ΤÔΑ έχουν άθροισμα 360° ,έχουμε $\nu \cdot \omega_\nu = 360^\circ$, δηλαδή $\omega_\nu = \frac{360^\circ}{\nu}$.

iv. Τα τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΒΓ, ... , ΟΤΑ είναι ίσα (ΠΠΠ), άρα και ισεμβαδικά και επομένως έχουμε:
$E_\nu = \nu(OAB) = \nu\frac{1}{2}AB \cdot OH = \frac{1}{2}\nu\lambda_\nu\alpha_\nu = \frac{1}{2}P_\nu\alpha_\nu$

39.Να αποδείξετε ότι σε δύο κανονικά ν-γωνα ο λόγος των πλευρών τους ισούται με το λόγο των ακτίνων τους και το λόγο των αποστημάτων τους.

Απόδειξη



Έστω δύο κανονικά πολύγωνα ΑΒΓ...Τ και Α'ΒΤ'...Τ' με το ίδιο πλήθος πλευρών, έστω ν (ν ≥3).
Αν Ο,Ο' τα κέντρα των πολυγώνων, τα τρίγωνα ΟΑΒ και Ο'Α'Β' είναι όμοια γιατί είναι ισοσκελή και έχουν ΑÔΒ = Α'Ô'Β' = $\frac{360^\circ}{\nu}$ και επομένως

$\frac{AB}{A'B'} = \frac{OA}{O'A'} = \frac{OH}{O'H'}$, όπου ΟΗ, Ο'Η' τα ύψη των τριγώνων. Από την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι: $\frac{\lambda_\nu}{\lambda'_\nu} = \frac{R}{R'} = \frac{\alpha_\nu}{\alpha'_\nu}$.

Βασικές ασκήσεις

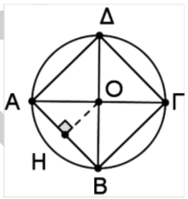
34. Να αποδείξετε ότι το μόνο κανονικό πολύγωνο με γωνία οξεία είναι το ισόπλευρο τρίγωνο.

35. Θεωρούμε κανονικό πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R). Να αποδείξετε ότι:
α) κάθε διαγώνιος χωρίζει το πεντάγωνο σε ένα ισοσκελές τραπέζιο και σε ένα ισοσκελές τρίγωνο,
β) η διχοτόμος της γωνίας ΒΑΓ είναι κάθετη στην πλευρά ΑΕ,
γ) δύο διαγώνιοι που δεν έχουν κοινό άκρο σχηματίζουν με δύο πλευρές του πενταγώνου ρόμβο και
δ) αν Η είναι το σημείο τομής της ΑΓ με τη ΒΔ, τότε $ΑΗ^2 = ΑΓ \cdot ΗΓ$.

2. Εγγραφή βασικών κανονικών πολυγώνων σε κύκλο και στοιχεία τους

40. Να κατασκευάσετε τετράγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R) και να υπολογίσετε την πλευρά και το απόστημά του.

Λύση

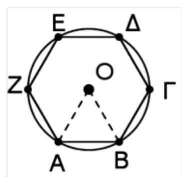


Έστω ένας κύκλος (Ο,R) και δύο κάθετες διάμετροι ΑΓ και ΒΔ. Είναι
$\hat{ΑΟΒ} = \hat{ΒΟΓ} = \hat{ΓΟΔ} = \hat{ΔΟΑ} = 90°$, οπότε
ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ = ΔΑ και επομένως το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο.
Από το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΟΑΒ με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος έχουμε $λ_4{}^2 = ΑΒ^2 = ΟΑ^2 + ΟΒ^2 = R^2 + R^2 = 2R^2 \Leftrightarrow λ_4 = R\sqrt{2}$

Είναι $α_4^2 + \frac{λ_4^2}{4} = R^2 \Leftrightarrow α_4^2 + \frac{\left(R\sqrt{2}\right)^2}{4} = R^2 \Leftrightarrow α_4^2 = R^2 - \frac{R^2}{2} = \frac{R^2}{2} \Leftrightarrow α_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$

41. Να κατασκευάσετε κανονικό εξάγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R) και να υπολογίσετε την πλευρά και το απόστημά του.

Λύση

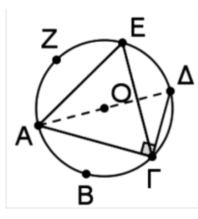


Έστω κύκλος (Ο,R) και ΑΒ η πλευρά του κανονικού εξαγώνου που θέλουμε να εγγράψουμε στον (Ο,R) . Τότε $\hat{ΑΟΒ} = ω_6 = 60°$ και επειδή ΟΑ = ΟΒ (=R) το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισόπλευρο.
Άρα ΑΒ = ΟΑ = R, δηλαδή $λ_6 = R$.
Έτσι για την εγγραφή κανονικού εξαγώνου σε κύκλο, παίρνουμε πάνω στον κύκλο έξι διαδοχικά τόξα ΑΒ ,ΒΓ ,ΓΔ ,ΔΕ ,ΕΖ και ΖΑ με αντίστοιχη χορδή R, το καθένα, οπότε το ΑΒΓΔΕΖ είναι κανονικό εξάγωνο.

Είναι $α_6^2 + \frac{λ_6^2}{4} = R^2 \Leftrightarrow α_6^2 + \frac{R^2}{4} = R^2 \Leftrightarrow α_6^2 = R^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{3R^2}{4} \Leftrightarrow α_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$

42. Να κατασκευάσετε ισόπλευρο τρίγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R) και να υπολογίσετε την πλευρά και το απόστημά του.

Λύση



Αν τα σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε και Ζ διαιρούν τον κύκλο σε έξι ίσα τόξα, τότε τα σημεία Α, Γ, Ε είναι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου, αφού $ΑΓ = ΓΕ = ΕΑ = 120°$.
Επειδή $ΑΓΔ = 180°$, η ΑΔ είναι διάμετρος και επομένως το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ορθογώνιο, οπότε:
$λ_3{}^2 = ΑΓ^2 = ΑΔ^2 - ΔΓ^2 = \left(2R\right)^2 - R^2 = 3R^2 \Leftrightarrow λ_3 = R\sqrt{3}$.

Είναι $α_3^2 + \frac{λ_3^2}{4} = R^2 \Leftrightarrow α_3^2 + \frac{3R^2}{4} = R^2 \Leftrightarrow α_3^2 = R^2 - \frac{3R^2}{4} = \frac{R^2}{4} \Leftrightarrow α_3 = \frac{R}{2}$

Βασικές ασκήσεις

36. Κανονικό πολύγωνο έχει ακτίνα R = 10cm και απόστημα $\alpha_\nu = 5\sqrt{3}$cm . Να βρεθεί η πλευρά του λ_ν και το εμβαδόν του Εν.

37. Σε κύκλο (Ο,R) παίρνουμε διαδοχικά τα τόξα $AB = 60°$, $B\Gamma = 90°$ και $\Gamma\Delta = 120°$. Να υπολογισθούν ως συνάρτηση του R οι πλευρές και το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

38. Σε κύκλο (Ο,R) και εκατέρωθεν του κέντρου του, θεωρούμε δύο παράλληλες χορδές του ΑΒ και ΓΔ, ώστε ΑΒ = R και $\Gamma\Delta = R\sqrt{3}$. Να υπολογισθούν οι μη παράλληλες πλευρές ΑΓ και ΒΔ του τραπεζίου ΑΒΔΓ, το ύψος του και το εμβαδόν του ως συνάρτηση του R.

39. Από το σημείο Α εκτός κύκλου (ΟΜ) φέρουμε τέμνουσα ΑΒΓ, ώστε ΑΒ = ΒΓ. Αν $OA = R\sqrt{7}$ να αποδείξετε ότι ΒΓ = λ_3 και στη συνέχεια να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΟΓ.

3. Μήκος κύκλου- Μήκος τόξου

43. Από ποιον τύπο υπολογίζετε το μήκος κύκλου ακτίνας R; Ποιο τόξο κύκλου λέγεται ακτίνιο(rad); Από ποιον τύπο υπολογίζεται το μήκος τόξου μ μοιρών και α rad;

Απάντηση

Μήκος κύκλου: $L = 2\pi R$

Ακτίνιο λέγεται ένα τόξο με μήκος ίσο με την ακτίνα του κύκλου.

Μήκος τόξου μ μοιρών: $\ell = \dfrac{\pi R\mu}{180}$ Μήκος τόξου α rad: $\ell = \alpha R$

Βασικές ασκήσεις

40. Πάνω σε ευθεία ε θεωρούμε διαδοχικά τα σημεία Α, Β, Γ και Δ. Αν L_1,L_2,L_3, και L είναι τα μήκη των κύκλων με διαμέτρους ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΑΔ αντίστοιχα να αποδείξετε ότι $L_1 + L_2 + L_3 = L$.

41. Όταν ένα ποδήλατο διανύει μια απόσταση, ο ένας τροχός του που έχει ακτίνα R κάνει ν στροφές, ενώ ο άλλος, που έχει ακτίνα ρ κάνει 2ν στροφές. Να αποδείξετε ότι R = 2ρ.

42. Δίνεται κύκλος (Ο,R) και τα διαδοχικά του σημεία Α, Β, Γ, ώστε να είναι $AB = R\sqrt{2}$ και $B\Gamma = R\sqrt{3}$. Να βρεθούν τα μήκη των τόξων ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ, ως συνάρτηση του R.

43. Με διάμετρο την ακτίνα ΟΑ ενός κύκλου (Ο, R) γράφουμε κύκλο (Κ) και από το Ο φέρουμε ημιευθεία που τέμνει τον κύκλο (Ο) στο Γ και τον κύκλο (Κ) στο Δ. Να αποδείξετε ότι τα τόξα ΑΓ και ΑΔ έχουν ίσα μήκη.

44. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με α = 13cm, β = 14cm και γ = 15cm. Να βρείτε το μήκος
α) του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου,
β) του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

45. Δίνεται ημικύκλιο (ΟΜ) διαμέτρου ΑΒ. Με διαμέτρους τις ΑΟ και ΟΒ γράφουμε στο εσωτερικό του πρώτου ημικύκλια. Να υπολογίσετε το μήκος του κύκλου, ο οποίος εφάπτεται των τριών αυτών ημικυκλίων, ως συνάρτηση του R.

4. Εμβαδόν κυκλικού δίσκου – κυκλικού τομέα – κυκλικού τμήματος

44.Ποια σχέση δίνει το εμβαδόν κυκλικού δίσκου ακτίνας R; Από ποιον τύπο υπολογίζετε το εμβαδόν κυκλικού τομέα μ μοιρών και α rad;

Απάντηση

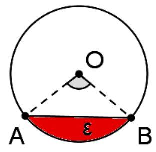
Το εμβαδόν Ε ενός κυκλικού δίσκου ακτίνας R δίνεται από τη σχέση $E=\pi R^2$.

Το εμβαδόν κυκλικού τομέα κέντρου Ο και αντιστοίχου τόξου AB δίνεται από τους τύπους:

$\left(OAB\right)=\dfrac{\pi R^2\mu}{360}$ και $\left(OAB\right)=\dfrac{1}{2}\alpha R^2$.

45.Πως υπολογίζετε το εμβαδόν κυκλικού τμήματος που σχηματίζεται από χορδή ΑΒ σε κύκλο (Ο,R);

Απάντηση



Η ΑΒ χωρίζει τον κυκλικό δίσκο σε δύο μέρη που βρίσκονται εκατέρωθεν αυτής. Καθένα από αυτά τα μέρη λέγεται κυκλικό τμήμα. Το εμβαδόν ε του κυκλικού τμήματος που περιέχεται στην κυρτή γωνία ΑΟΒ υπολογίζεται με τη βοήθεια της ισότητας $\varepsilon=\left(OAB\right)-\left(OAB\right)$ δηλαδή αφαιρώντας από το εμβαδόν του κυκλικού τομέα το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ.

Βασικές ασκήσεις

46. Δίνεται κύκλος (Ο,R) και ισόπλευρο τρίγωνο εγγεγραμμένο σε αυτόν. Να βρεθεί το εμβαδόν του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

47.Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α. Γράφουμε τα τόξα των κύκλων (Α, α), (Β, α) και (Γ, α) που περιέχονται στις γωνίες $\hat{A},\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ αντίστοιχα. Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του α την περίμετρο και το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ.

48.Τρεις ίσοι κύκλοι ακτίνας R εφάπτονται εξωτερικά ανά δύο στα σημεία Α, Β και Γ. Να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ, ως συνάρτηση του R.

49.Δίνεται κύκλος (Ο,R) και ακτίνα του ΟΑ. Στην προέκταση της ΟΑ προς το Α παίρνουμε σημείο Β, ώστε ΟΑ = ΑΒ. Αν ΒΓ είναι το εφαπτόμενο τμήμα που άγεται από το Β προς τον κύκλο, να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ.

50.Δυο ίσοι κύκλοι ακτίνας R έχουν διάκεντρο ίση με $R\sqrt{2}$. Να βρεθεί το εμβαδόν του κοινού τους μέρους.

51.Δίνεται ένα ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ και στο εσωτερικό του τα ημικύκλια διαμέτρων ΑΓ και ΓΒ, όπου Γ σημείο της διαμέτρου ΑΒ. Η κάθετος της ΑΒ στο Γτέμνει το αρχικό ημικύκλιο στο Δ. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των τριών ημικυκλίων (***άρβυλος του Αρχιμήδη***) είναι ίσο με το εμβαδόν του κύκλου διαμέτρου ΓΔ.

52.Δίνεται κύκλος (Ο,R) και τόξο του $AB=60^\circ$. Να βρεθεί το εμβαδόν του εγγεγραμμένου κύκλου στον κυκλικό τομέα OAB.

Επαναληπτικά διαγωνίσματα

1ο διαγώνισμα

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Το εμβαδό για καθένα από τα γεωμετρικά σχήματα που αναφέρονται στη στήλη Ι του επόμενου πίνακα δίνεται με έναν από τους τύπους που υπάρχουν στη στήλη ΙΙ. Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της πρώτης στήλης και ακριβώς δίπλα τον αριθμό της δεύτερης στήλης που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση. μονάδες 12,5

ΣΤΗΛΗ Ι	ΣΤΗΛΗ ΙΙ
Α. Τετράγωνο πλευράς α	**1.** $E = \alpha \cdot \beta$
Β. Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρές α, β	**2.** $E = (B - \beta)\frac{\upsilon}{2}$
Γ. Παραλληλόγραμμο (πλάγιο) με βάση α και (αντίστοιχο) ύψος υ	**3.** $E = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$
Δ. Τρίγωνο με βάση α και (αντίστοιχο) ύψος υ	**4.** $E = \alpha \cdot \upsilon$
Ε. Ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς α	**5.** $E = \alpha^2$
ΣΤ. Τραπέζιο με βάσεις Β, β και ύψος υ	**6.** $E = \frac{1}{2}\alpha \cdot \upsilon$
	7. $E = \frac{\alpha \cdot \beta}{2}$
	8. $E = (B + \beta)\frac{\upsilon}{2}$

Β. *Για τις επόμενες δύο ερωτήσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό τους (**1.Β.α** και **1.Β.β**) και δίπλα να σημειώσετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.*

α. Το εμβαδό ενός τριγώνου είναι $24cm^2$ ενώ η βάση του είναι 12cm. Το αντίστοιχο ύψος είναι:

Α. 6cm **Β.** 5cm **Γ.** 4cm **Δ.** 2cm **Ε.** 12cm

μονάδες 6,5

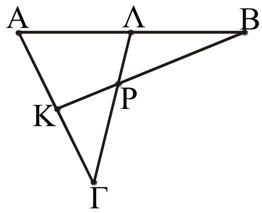
β. Οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι 4cm και 9cm. Η πλευρά του τετραγώνου το οποίο έχει το ίδιο εμβαδό με το ορθογώνιο αυτό είναι:

Α. 36cm **Β.** 6cm **Γ.** 6,5cm **Δ.** 13cm **Ε.** 5cm

μονάδες 6

ΘΕΜΑ 2ο

Στο διπλανό σχήμα τα σημεία Κ και Λ είναι μέσα των τμημάτων ΑΓ και ΑΒ αντιστοίχως. Να δείξετε ότι:



α) Ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων ΑΚΒ και ΑΛΓ είναι ίσος με 1.

β) Αν Ρ είναι το σημείο τομής των ΛΓ και ΚΒ, τότε τα τρίγωνα ΒΛΡ και ΚΓΡ έχουν ίσα εμβαδά. μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Η γωνία $\hat{\varphi}_\nu$ ενός κανονικού πολυγώνου είναι ίση με $120°$ ενώ η πλευρά του είναι $\lambda_\nu = 12cm$.

α. Να αποδείξετε ότι το πλήθος των πλευρών του πολυγώνου αυτού είναι ν=6.

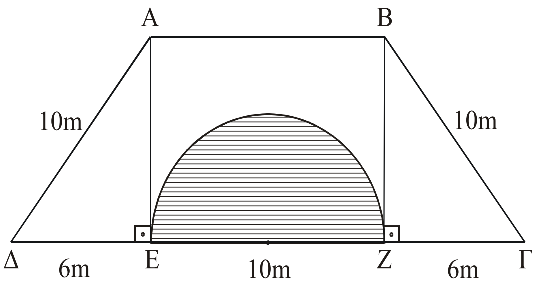
μονάδες 12

β. Να υπολογίσετε την ακτίνα R του περιγεγραμμένου κύκλου και το απόστημα α_ν του πολυγώνου. μονάδες 13

ΘΕΜΑ 4ο

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η πρόσοψη μιας σήραγγας (τούνελ)

α. Να υπολογίσετε το ύψος ΑΕ. μονάδες 6



β. Να υπολογίσετε το εμβαδό του τραπεζίου ΑΒΓΔ. μονάδες 6

γ. Να υπολογίσετε το εμβαδό του ημικυκλίου με διάμετρο ΕΖ. (Δίνεται ότι π=3,14)
μονάδες 6

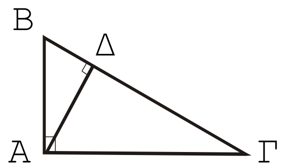
δ. Να υπολογίσετε το κόστος της επένδυσης της πρόσοψης (μη γραμμοσκιασμένο μέρος) με πέτρα αν η επένδυση κοστίζει 4.000 δρχ ανά τετραγωνικό μέτρο.
μονάδες 7

2ο διαγώνισμα

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1. Στο παρακάτω σχήμα το ΑΔ είναι ύψος του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$

*Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της **Στήλης Α** και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης Β**, έτσι ώστε να προκύπτει ισότητα.*



Στήλη Α	**Στήλη Β**
α. AB^2	**1.** $B\Delta \cdot B\Gamma$
β. $A\Delta^2$	**2.** $\frac{B\Delta}{\Gamma\Delta}$
γ. $\frac{AB^2}{A\Gamma^2}$	**3.** $B\Delta \cdot \Delta\Gamma$
	4. $\Gamma\Delta \cdot \Gamma B$
	5. $\frac{\Gamma\Delta}{B\Delta}$

Μονάδες 6

Α.2. Να αποδείξετε ότι, σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο της υποτείνουσας ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των κάθετων πλευρών του.
Μονάδες 6,5

Β. Στο σχήμα του ερωτήματος **Α.1** δίνεται ότι ΑΒ = 6 και ΒΔ = 3,6 .

Β.1. Να δείξετε ότι ΒΓ = 10. Μονάδες 6,5

Β.2. Να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ. Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 120^\circ$.

α. Να αποδείξετε ότι $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma$. Μονάδες 10

β. Αν επιπλέον ισχύει β = 2γ, να αποδείξετε ότι η διάμεσος μ_α του παραπάνω τριγώνου ΑΒΓ είναι ίση με $\frac{\gamma\sqrt{3}}{2}$. Μονάδες 15

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α εγγεγραμμένο σε κύκλο κέντρου Ο. Στην πλευρά ΒΓ θεωρούμε το σημείο Ε έτσι ώστε ΕΓ= $\frac{\alpha}{3}$ και προεκτείνουμε την ΑΕ που τέμνει τον κύκλο στο σημείο Ζ.

α. Να αποδείξετε ότι ΑΕ = $\frac{\alpha\sqrt{7}}{3}$. Μονάδες 8

β. Να αποδείξετε ότι ΕΖ = $\frac{2\sqrt{7}}{21}\alpha$. Μονάδες 8

γ. Να βρείτε το λόγο των εμβαδών των τριγώνων ΑΕΒ και ΓΕΖ. Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

Τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R). Η πλευρά ΑΒ είναι ίση με την πλευρά λ_4 του εγγεγραμμένου στον κύκλο (Ο,R) τετραγώνου και η πλευρά ΑΓ είναι ίση με την πλευρά λ_6 του εγγεγραμμένου στον κύκλο (Ο,R) κανονικού εξαγώνου. Φέρουμε το ύψος ΑΗ του τριγώνου ΑΒΓ.

α. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ. Μονάδες 6

β. Να αποδείξετε ότι $AH = \frac{R\sqrt{2}}{2}$. Μονάδες 3

γ. Να αποδείξετε ότι ΒΓ = $\frac{R\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)}{2}$. Μονάδες 6

δ. Με κέντρο την κορυφή Β και ακτίνα ΒΑ γράφουμε κύκλο, ο οποίος τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Δ, και με κέντρο την κορυφή Γ και ακτίνα ΓΑ γράφουμε κύκλο, ο οποίος τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Ε. Να υπολογίσετε τα εμβαδά των καμπυλόγραμμων τριγώνων ΑΒΕ και ΑΓΔ ως συνάρτηση της ακτίνας R.

Μονάδες 10

3ο διαγώνισμα

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να δείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο, το άθροισμα των τετραγώνων δύο πλευρών τριγώνου ισούται με το διπλάσιο του τετραγώνου της περιεχόμενης διαμέσου, αυξημένο κατά το μισό του τετραγώνου της τρίτης πλευράς. μονάδες 10

Β.Σε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις, να γράψετε στη κόλλα σας τον αριθμό που αντιστοιχεί και δίπλα το γράμμα (Σ) αν θεωρείται τη πρόταση σωστή, ή το γράμμα (Λ) αν θεωρείται ότι η πρόταση είναι λανθασμένη.

- **i.** Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α, β, γ ισχύει $\beta^2 < \alpha^2 + \gamma^2$, τότε το τρίγωνο είναι πάντοτε οξυγώνιο.
- **ii.** Αν δύο τρίγωνα έχουν ίσα εμβαδά, τότε τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα.
- **iii.** Αν ένα τρίγωνο χωρίζεται από μια διχοτόμο του σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα, τότε είναι ισοσκελές.
- **iv.** Δύο τρίγωνα όμοια και ισεμβαδικά είναι ίσα.
- **v.** Αν οι πλευρές τετραγώνου αυξηθούν κατά 4 cm η καθεμία, τότε το εμβαδόν του αυξάνεται κατά 16 cm^2. μονάδες 15

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο ισχύει: $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο. μονάδες 5

β) Να αποδείξετε ότι $A = 120^\circ$. μονάδες 6

γ) Αν $\beta = 6$ και $\gamma = 4$, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. μονάδες 6

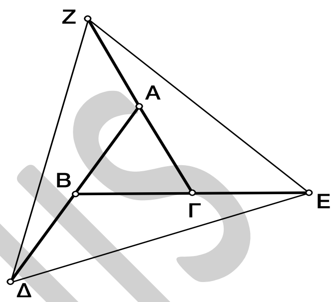
δ) Αν Δ είναι η προβολή του Β στην ΑΓ, να υπολογίσετε το λόγο των εμβαδών $\frac{(\mathrm{AB\Gamma})}{(\mathrm{A\Delta B})}$.

μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3ο

α) Στο διπλανό σχήμα οι πλευρές τριγώνου ΑΒΓ έχουν προεκταθεί κατά $\mathrm{B\Delta = AB}$, $\mathrm{\Gamma E = B\Gamma}$ και $\mathrm{AZ = A\Gamma}$. Αν $(\mathrm{AB\Gamma}) = 10\ \mathrm{cm}^2$, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΔΕΖ.

μονάδες 10



β) Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(A = 90^\circ)$ με $\mathrm{AB} = 6$ και $\mathrm{A\Gamma} = 8$. Να βρείτε:

i. το εμβαδόν του. μονάδες 4

ii. το ύψος υ_α. μονάδες 6

iii. την ακτίνα ρ του εγγεγραμμένου κύκλου. μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4ο

Δύο ίσοι τεμνόμενοι κύκλοι (Ο, R) και (Ο΄, R) έχουν διάκεντρο ίση με $R\sqrt{2}$ και κοινή χορδή ΑΒ. Να βρεθούν:

α) Το εμβαδόν του κυκλικού τομέα ΑΟΒ. μονάδες 12

β) Το εμβαδόν του κοινού μέρους των δύο κύκλων. μονάδες 13

4ο διαγώνισμα

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν ενός ορθογώνιου παραλληλογράμμου ισούται με το γινόμενο των πλευρών του. μονάδες 11

Β. *Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της **Στήλης Ι** και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης ΙΙ** που αντιστοιχεί στο σωστό τύπο.*

Στήλη Ι	**Στήλη ΙΙ**
α. Εμβαδόν τραπεζίου	**1.** $E = \tau\rho$
β. Εμβαδόν τριγώνου	**2.** $E = \frac{\pi R^2 \mu}{360}$
γ. Εμβαδόν κανονικού πολυγώνου	**3.** $E = \frac{(B+\beta)\upsilon}{2}$
	4. $E = \frac{1}{2} P_\nu \alpha_\nu$
	5. $E = \alpha\upsilon_\alpha$

Στη **Στήλη ΙΙ** περισσεύουν δύο τύποι. μονάδες 6

Γ. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη* ***"Σωστό",*** *αν η πρόταση είναι σωστή, και* ***"Λάθος",*** *αν η πρόταση είναι λάθος, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma$

β. Σε κάθε κανονικό ν-γωνο ακτίνας R με πλευρά λ_ν και απόστημα α_ν ισχύει η σχέση:

$$\alpha_\nu^{\ 2} + \frac{\lambda_\nu^{\ 2}}{2} = R^2 .$$

γ. Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους του που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των καθέτων πλευρών του στην υποτείνουσα.

δ. Το άθροισμα των τετραγώνων δύο πλευρών ενός τριγώνου ισούται με το διπλάσιο του τετραγώνου της διαμέσου που περιέχεται μεταξύ των πλευρών αυτών αυξημένο κατά το μισό του τετραγώνου της τρίτης πλευράς.

μονάδες 8

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται κανονικό πολύγωνο $A_1 A_2 \ldots A_\nu$ εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα R . Αν η γωνία του πολυγώνου είναι $\varphi_\nu = 150^o$, να βρείτε:

α. Τον αριθμό των πλευρών του πολυγώνου. μονάδες 10

β. Την κεντρική γωνία του πολυγώνου ω_ν . μονάδες 8

γ. Το εμβαδόν του πολυγώνου συναρτήσει της ακτίνας R. μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με μήκη πλευρών γ=2, $\beta = 1+\sqrt{2}$ και εμβαδόν $(ΑΒΓ) = \frac{\beta\gamma\sqrt{2}}{4}$.

α. Να αποδείξετε ότι το μήκος της πλευράς $\alpha = \sqrt{3}$. μονάδες 9

β. Να υπολογίσετε την ακτίνα R του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ.

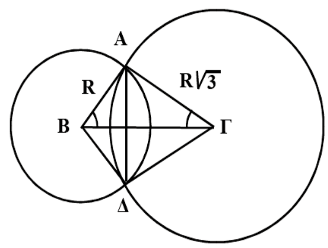
μονάδες 8

γ. Να υπολογίσετε το μήκος της προβολής της πλευράς ΑΒ πάνω στη πλευρά ΒΓ.

μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^0$)με μήκη πλευρών ΑΒ=R και ΑΓ= $R\sqrt{3}$.Γράφουμε τους κύκλους (Β, R) και (Γ, $R\sqrt{3}$).



Να υπολογίσετε:

α. Το μήκος της πλευράς ΒΓ συναρτήσει του R.

μονάδες 4

β. Τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ μονάδες 4

γ. Το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΔΓ συναρτήσει του R.

μονάδες 8

δ. Το εμβαδόν του κοινού μέρους των δύο κύκλων συναρτήσει του R.

μονάδες 9